UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

SS 2008

Operatives Logistikmanagement

Harry Kran (echo-upb.de)
Prof. Dr. Stephan Betz
Universität Paderborn
SS 2008

Inhaltsverzeichnis

Operatives Logistikmanagement

1. Grundlagen

Vor einem kurzfristigen Planungshorizont sollen folgende Teilprobleme gelöst werden.

a) Operative Beschaffungslogistik
   - Welche Materialien sollen eigen- bzw. fremdbearbeitet werden?
   - In welchen Mengen sollen Materialien bestellt werden?

b) Operative Produktionslogistik
   - Von wo nach wo sollen welche Produktionsmengen inner- und zwischenbetrieblich transportiert werden?

c) Operative Absatzlogistik
   - In welcher Reihenfolge sollen Nachfrageorte vom Angebotsort aus angefahren werden?
   - Welche Nachfrageorte sollen jeweils zu einer Tour zusammengefasst werden?

2. Operative Beschaffungslogistik

2.1 Materialbeschaffungsart

Es geht um die Wahl zwischen Eigenfertigung und Fremdfertigung.

I. **Kein Kapazitätsengpass**

Wenn freie Kapazitäten vorliegen, wird diejenige Beschaffungsart gewählt, die zu den geringeren Kosten führt:

$$\underset{\text{Materialart n}}{k_n^*} = \min\left\{ \underset{\substack{\text{Fremdbezugskosten,}\\ \text{in [GE]/[MME]}}}{k_{Fn}} \; ; \; \underset{\substack{\text{Eigenfertigungskosten,}\\ \text{in [GE]/[MME]}}}{k_{En}} \right\}$$

Zur genaueren Spezifikation von k_{Fn} und k_{En}: Seite 92!

Exkurs zu den Rabattalternativen (S. 93 – 96) entfällt im SS08

II. **Ein Kapazitätsengpass**

(d. h. auf einer Fertigungsstufe $\overline{m}$ reicht die Kapazität nicht aus, um die gewünschten Mengen der verschiedenen Materialarten herzustellen)

Im Folgenden werden zwei Annahmen getroffen:

a. Eigen- und Fremdbearbeitung sind technisch möglich
b. Eigen- und Fremdbearbeitung sind ökonomisch sinnvoll

Fallunterscheidung

a) $k_{En} > k_{Fn}$

Da die Kapazität auf Stufe $\overline{m}$ knapp ist, wird Materialart n fremdbearbeitet

b) $k_{En} \leq k_{Fn}$

Aus ökonomischer Sicht ist die EF der FF gegenüber vorzuziehen.

ABER: Kapazitätsengpass auf Stufe $\overline{m}$ ☒

Vorgehen:

(1) Zunächst werden diejenigen Materialarten identifiziert, die $\overline{m}$ nicht belasten: Wenn $k_{Fn} < k_{En}$ gilt, dann wird man Materialart n fremdbearbeiten.

(2) Für alle anderen Materialarten wird die sog. Relative Kostendifferenz ermittelt:

$$\Delta K_n^r = \frac{k_{Fn} - k_{En}}{a_{\bar{m}n}} \qquad \frac{[GE]/[MME]}{[ZE]/[MME]}$$

mit $a_{\bar{m}n}$: Beanspruchung der Engpassstufe $\bar{m}$ durch die Materialart n, in [ZE]/[MME]

ΔK_n^r gibt die Ersparnis an, die dadurch erzielt wird, dass auf Stufe $\bar{m}$ die Materialart n für eine [ZE] eigen- statt fremdbearbeitet wird.

(3) Alle Materialarten aus (2) werden nach fallenden ΔK_n^r-Werten sortiert und in dieser Reihenfolge in die Engpassstufe eingeplant, bis deren Kapazität erschöpft ist.

(4) Alle in (3) noch nicht (im Umfang der gewünschten Mengen) eingeplante Materialmengen werden fremdbearbeitet.

(5) Abschließend werden die Gesamtkosten ermittelt.

Beispiel:

$A_{\bar{m}} = 500[ZE]/[PZE]$

n	A	B	C	D	Dimension
k_{En}	20	15	18	12	[GE]/[MME]
k_{Fn}	25	17	14	16	[GE]/[MME]
$a_{\bar{m}n}$	0,50	0,10	0,30	0,80	[ZE]/[MME]
X_n	400	1000	600	500	[MEE]/[PZE]

↰ Planmenge der Materialart n

Welche Materialarten sollen eigen- / fremdbearbeitet werden? Wie hoch sind die Gesamtkosten?
Es liegt der Fall „ein Engpass" vor, weil der Kapazitätsbedarf > Kapazitätsvorrat (Fonds)
0,50*400 + 0,10*1000 + 0,30*600 + 0,80*500 = 880 > 500

Vorgehen:

(1) Da für Materialart C gilt:

$k_{En} > k_{Fn}$, sollte C auf $\bar{m}$ fremdbearbeitet werden.

Besteht noch ein Engpass?

Kapazitätsbedarf $\overset{\leq}{\underset{\geq}{=}}$ Kapazitätsfonds ?

880 – 0,30*600 > 500
700 > 500 ☒

(2) Für A, B und D sind die relativen Kostendifferenzen zu ermitteln.

$$\Delta K_A^r = \frac{25-20}{0{,}50} = 10 \quad \frac{[GE]}{[ZE]}$$

$$\Delta K_B^r = \frac{17-15}{0{,}10} = 20$$

$$\Delta K_D^r = \frac{16-12}{0{,}80} = 5$$

(3) Einplanungsreihenfolge
B – A – D

(4) Durchführung der Einplanung
B: Kapitalbedingung: 0,10*1000 = 100
$A_{\bar{m}} = 500 \quad \rightarrow \quad x_B^* = 1000$
A: Kapitalbedingung: 0,50*400 = 200
$A_{\bar{m}} = 400 \quad \rightarrow \quad x_A^* = 400$

D: Kapitalbedingung: 0,80*500 = 400

$A_{\bar{m}} = 200 \quad \rightarrow \quad x_D^* = 250 \quad (200/0,8)$

Die noch nicht eingeplante Restmenge von D (hier: 250) wird fremdbearbeitet.

(5) Ermittlung der Gesamtkosten

$K^* = 20*400 + 15*1000 + 14*600 + 12*250 + 16*250 = 38.400$

III. Mehr als ein Kapazitätsengpass

Reicht die Kapazität auf mehr als einer Fertigungsstufe nicht aus, um alle Materialarten in den gewünschten Mengen eigenbearbeiten zu können, so muss entschieden werden, welche Mengen welcher Materialarten auf welchen Stufen eigen- / fremdbearbeitet werden.

Lineares Programm:

$$Min\ K = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{k_{mnE}}_{\text{Kosten der EF für Materialart n auf Stufe m}} x_{mnE} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} k_{mnF} x_{mnF} \qquad \text{Parameter} \quad \text{Variablen (2MN)}$$

unter folgenden Nabenbedingungen

(1) Kapazitätsbedingungen

Kapazitätsbedarf $\leq$ Kapazitätsvorrat

$$\sum_{n=1}^{N} a_{mn} x_{mnE} \leq A_m \quad mit \quad m = 1(1)M$$

(2) Mengenkontinuitätsbedingungen

(a) $x_{mnE} + x_{mnF} = x_{m+1,n,E} + x_{m+1,n,F} \qquad \forall m = 1(1)M-1, \quad \forall n = 1(1)M$

(b) $x_{MnE} + x_{MnF} = X_n \qquad \forall n = 1(1)N$

mit X_n als Parameter vorgegebene Planmenge

(3) Fremdleistungsbedingungen

$x_{mnF} \leq X_{mnF} \qquad \forall m = 1(1)M, \quad \forall n = 1(1)N$

mit X_{mnF} als Parameter vorgegebene Obergrenze

(4) Nicht-Negativitätsbedingung

$x_{mnE} \geq 0, \quad x_{mnF} \geq 0 \qquad \forall m = 1(1)M, \quad \forall n = 1(1)N$

2.2 Materialbeschaffungsmengen

Die Planung der Materialbeschaffungsmenge baut auf der Planung des Materialbedarfs auf.
Ziel: Minimierung der mit der Beschaffung verbundenen Kosten

2.2.1 Grundlegende Aspekte

Zwei grundsätzliche Strategien zur Beschaffung der benötigten Materialmengen:

(A) Fertigungssynchrone (= Einsatzsynchrone) Beschaffung
d. h. die Anlieferung erfolgt zeitlich synchron zum Bedarf
   a. Die Bestellung erfolgt zeitliche vor dem Bedarf
   b. Die Bestellung erfolgt zeitlich synchron zum Bedarf

(B) Vorratsbeschaffung
d. h. die Anlieferung erfolgt zeitlich vor dem Bedarf

Beurteilung von (A) und (B)

Vorteile (A):

- Geringer Lagerraum erforderlich
- Niedrige Lagerhaltungskosten
- Niedrige Kapitalbindungskosten
- Geringe Risiken von Schwund, Verderb, Veralterung des Lagerbestandes

In ihrer umgekehrten Ausprägung sind die Vorteile (A) die Nachteile (B).

Nachteile (A):

- Risiken von Fehlmengen
- Gefahr der Fertigungsunterbrechung
- Erfordernis einer sehr exakten Zeitplanung
- Fehlende Möglichkeit, durch zusammengefassten Einkauf Preisvorteile zu erzielen

In ihrer umgekehrten Ausprägung sind die Nachteile von (A) die Vorteile von (B).

Zur Entwicklung von Verbrauchs- und Liefergeschwindigkeit im Zeitverlauf: s. Skript S. 98-99

2.2.2 Konstante Bedarfsrate

2.2.2.1 Standardfall

Problemstellung: Es ist diejenige Materialmenge zu bestimmen, die bei gegebenem Gesamtperiodenbedarf pro Bestellung zu beschaffen ist, wenn als Ziel die Minimierung der mit der Beschaffung verbundenen Kosten verfolgt wird. („optimale Bestellmenge“)

Variable:

r: die je Bestellvorgang zu beschaffende Menge, in [FE]/[Bestellung]

Parameter:

R: Gesamtbedarf im Planungszeitraum, in [FE]/[PZE]

k_B : Bestellfixe Kosten, in [GE]/[FE]

k_L : Lagerhaltungskosten, in [GE]/([FE][PZE])

q : Faktorpreis, in [GE]/[FE]

Die zugehörige Kostenfunktion lautet:

$$K(r) = \underbrace{qR}_{\substack{\text{Material-}\\\text{kosten}}} + \underbrace{k_B \frac{R}{r}}_{\text{Bestellkosten}} + \underbrace{k_L \frac{1}{2} r}_{\text{Lagerkosten}}$$

Der Zielkonflikt in K(r) besteht darin, dass mit zunehmender r zwar die Bestellkosten sinken, aber die Lagerkosten steigen und umgekehrt. Das kostenminimale r ergibt sich durch Ableiten von K(r) nach r:

$$K'(r) = -\frac{R}{r^2} k_B + k_L \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{R}{r^2} k_B = k_L \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad R k_B = k_L \frac{1}{2} r^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2R \frac{k_B}{k_L} = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^* = \pm\sqrt{2R \frac{k_B}{k_L}}$$

In Dimensionen: $\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{[Best]} \dfrac{[GE]}{[Best]} \dfrac{[FE]}{[PZE]}}{\dfrac{[GE]}{[FE][PZE]}}} = \sqrt{\dfrac{[FE]^2}{[Best]^2}} = \dfrac{[FE]}{[Best]}$

$K''(r) = \dfrac{2Rk_B}{r^3} > 0$ für alle r!

An der Stelle r^* liegt ein Minimum vor!

Setzt man r^* in K(r) ein, so erhält man die minimalen Kosten:

$$K(r^*) = qR + \frac{k_B R}{\sqrt{\frac{2Rk_B}{k_L}}} + k_L \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2Rk_B}{k_L}} = qR + \sqrt{\frac{k_L}{2Rk_B}} k_B R + \sqrt{\frac{k_L{}^2 2Rk_B}{4k_L}}$$

$$= qR + \sqrt{\frac{k_B{}^2 R^2 k_L}{2Rk_B}} + \sqrt{\frac{k_L 2Rk_B}{2}} = qR + \sqrt{\frac{k_B R k_L}{2}} + \sqrt{\frac{k_L R k_B}{2}} = qR + \sqrt{2k_B R k_L}$$

Beispiel

q = 0,5[GE]/[FE], R = 25.600[FE]/[PZE], $k_B = 125$[GE]/[Best], $k_L = 1{,}6$[GE]/([FE][PZE])

a) Bestimmen Sie die optimale Bestellmenge

$$r^* = \sqrt{\frac{2*125*25.600}{1{,}6}} = 2.000[FE]/[Best]$$

mit $K(r^*) = K(2.000) = 0{,}5*25.600 + \sqrt{2*125*25.600*1{,}6} = 16.000$

b) Wie häufig muss im Optimum bestellt werden?

$$\frac{R}{r^*} = \frac{25.600}{2.000} = 12{,}8[Best]/[PZE]$$

~> 12,8[Best] pro [PZE] bedeuten 64 [Best] pro 5[PZE]
d. h. 12,8[Best] ist ein Durchschnittswert

c) Zeigen Sie allgemein: Um wie viel Prozent steigt die optimale Bestellmenge, wenn sowohl k_B als auch k_L jeweils um 10% steigt?

Allgemein gilt: $r^* = \sqrt{\frac{2k_B R}{k_L}}$

Nach der 10%-Erhöhung gilt: $r^*_{neu} = \sqrt{\frac{2*1{,}1*k_B R}{1{,}1*k_L}} = \sqrt{\frac{2k_B R}{k_L}} = r^*$

~> Optimale Bestellmenge steigt um 0%.

d) Um wie viel Prozent darf q steigen, wenn eine Budgetvorgabe von $\overline{k} = 22.400$ nicht überschritten werden darf?

Da r^* nicht von q abhängt, bleibt r^*=2.000 unabhängig von q immer gleich!

Dann muss gelten: $K(r^*, q) \le 22.400$

$q*25.600 + 3.200 \le 22.400 \quad \Leftrightarrow \quad 25.600q \le 19.200 \quad \Leftrightarrow \quad q \le 0{,}75$

q darf maximal um 0,25/0,5 = 0,5 = 50% erhöht werden!

2.2.2.2 Berücksichtigung von Mengenrabatten

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass q von der Einzelbestellmenge r abhängt, weil Mengenrabatte in Anspruch genommen werden können.
Darüber hinaus hängen auch die Lagerhaltungskosten k_L von der Bestellmenge r ab, weil k_L auch Kapitalbindungskosten umfasst, die sinken, wenn q sinkt.
k_L umfasst neben k_{KB} (Kapitalbindungskosten) auch so genannte Bestandshandhabungskosten (k_{BH}), so dass allgemein gilt: $k_L = k_{KB} + k_{BH}$

Im Folgenden wird unterstellt, dass sich k_{KB} und q zueinander proportional verhalten: $k_{KB} = lq$ mit $l > 0$.

Für k_{BH} wird unterstellt, dass diese Kosten konstant sind: $k_{BH} = m$.

Die neue zu minimierende Kostenfunktion lautet:

$$K(r) = \underbrace{q(r)R}_{\text{Material-kosten}} + \underbrace{k_B\frac{R}{r}}_{\text{Bestellkosten}} + \underbrace{[lq(r)+m]\frac{1}{2}r}_{\text{Lagerkosten}}$$

Problem: Die Funktion q(r) ist eine unstetige Funktion, so dass K(r) nicht ohne Weiteres minimiert werden kann.

Allgemein gilt für q(r):

$$q(r)=\begin{cases} q_0, \; wenn \; 0 \le r < \bar{r}_1 \\ q_1, \; wenn \; \bar{r}_1 \le r < \bar{r}_2 \\ \vdots \\ q_I, \; wenn \; \bar{r}_{I-1} \le r < \bar{r}_I \end{cases}$$

Ein Kostenminimum kann man immer nur für einen Faktorpreis ermitteln, d. h. das jeweilige Minimum hängt von q_i ab, i = 0,…,I.

Für q_i gilt:

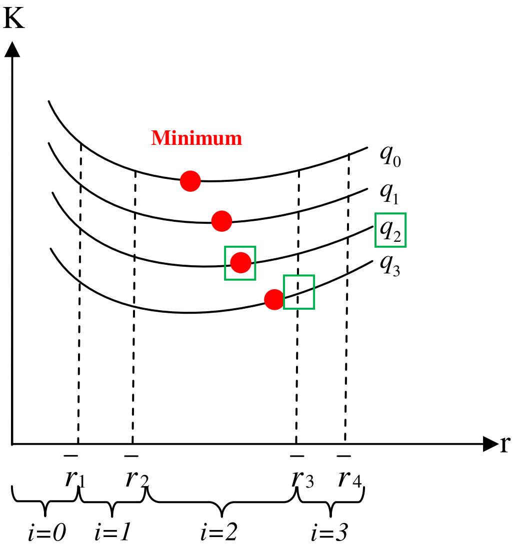
$$K(r)=q_i R+k_B\frac{R}{r}+(lq_i+m)\frac{1}{2}r$$

Das Kostenminimum für ein q_i lässt sich folgendermaßen ermitteln:

$$K'(r)=-k_B\frac{R}{r^2}+(lq_i+m)\frac{1}{2}\overset{!}{=}0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}(lq_i+m)=k_B\frac{R}{r^2} \;\Leftrightarrow\; r^2=\frac{2k_B R}{lq_i+m} \;\Leftrightarrow\; r=\sqrt{\frac{2k_B R}{lq_i+m}}$$

Für jede Rabattklasse i lässt sich r_i^* in Abhängigkeit von q_i ermitteln!

ABER: Die ermittelte Menge r_i^* kann/muss nicht in der zu q_i gehörenden Rabattklasse liegen.
~> s. Skript S. 105



Problem:

Das Kostenminimum einer Rabattklasse i (im Sinne des Preises q_i fällt nicht immer in das zu Klasse i gehörende Mengenintervall. Beispiel: i = 3

Lösung:

1) Für Rabattklasse I mit q_i ermittelt man r_I^*
2) Man überprüft, ob r_I^* in die Rabattklasse (Mengenintervall) fällt. Wenn ja, ist das Optimum gefunden. Wenn nein, geht man zu Schritt (3)
3) Nun ist r_{I-1}^* zu bestimmen. Fällt r_{I-1}^* in das Mengenintervall zu Klasse I – 1, hat man das „vorläufige" Optimum gefunden. Wenn nicht, ermittelt man r_{I-2}^* u. s. w.

4) Für das „vorläufige“ Optimum wird überprüft, ob die zugehörige Gesamtkosten geringer sind als diejenigen Gesamtkosten, die zu Intervalluntergrenzen aller höheren Rabattklassen gehören. Wenn ja, ist das vorläufige Optimum auch das endgültige Optimum. Wenn nein, liegt das endgültige Optimum im Minimum der Gesamtkosten aller untersuchten Intervallgrenzen.

Beispiel

R = 10.000, $k_B = 180$, $k_L = 0,2q_i \overset{+0,5}{+1}$

$$q_i(r) = \begin{cases} q_0 = 2,0 \; falls \; r \in [0,1000] & (i=0) \\ q_1 = 1,9 \; falls \; r \in [1000,5000] & (i=1) \\ q_2 = 1,8 \; falls \; r \in [5000,10000] & (i=2) \\ q_3 = 1,6 \; falls \; r \in [10000,\infty] & (i=3) \end{cases}$$

Ermittlung von r^*:

(1) Für I = 3 wird r_I^* ermittelt:

$$r_I^* = \sqrt{\frac{2*180*10.000}{0,2*1,6+1}} \approx \underset{2095,29}{1.651,45} \notin [10000,\infty]$$

(2) Da r_I^* nicht in Klasse I fällt, ist Schritt (3) durchzuführen.

(3) Für I – 1 = 2 wird $r_{I-1}^* = r_2^*$ ermittelt:

$$r_2^* = \sqrt{\frac{2*180*10.000}{0,2*1,8+1}} \approx \underset{2045,98}{1.626,98} \notin [5000,10000]$$

r_2^* fällt nicht in Mengenintervall 2, deshalb muss für 1 r_1^* ermittelt werden:

$$r_1^* = \sqrt{\frac{2*180*10.000}{0,2*1,9+1}} \approx \underset{2022,60}{1.615,15} \in [1000,5000]$$

Da zu i = 1 das Mengenintervall [1000,5000] gehört ist r_1^* das „vorläufige“ Optimum.

(4) Für die Rabattklassenuntergrenzen von I – 1 = 2 und I = 3 ist nun noch zu prüfen, ob sie zu geringeren / höheren Beschaffungskosten führen.

Zu r_1^* gehören folgende Gesamtkosten:

$$K(r_1^*) = 1,9*10.000 + 180\frac{10.000}{1.615,15} + (0,2*1,9+1)*\frac{1}{2}*1.615,15 = \underset{20.779,89}{21.228,90}$$

Für $\bar{r}_2 = 5.000$ und $\bar{r}_3 = 10.000$ sind nun noch die Gesamtkosten zu ermitteln:

$$K(\bar{r}_2) = 1,8*10.000 + 180*\frac{10.000}{5.000} + (0,2*1,8+1)*\frac{1}{2}*5.000 = \underset{20.510}{21.760}$$

$$K(\bar{r}_3) = 1,6*10.000 + 180*\frac{10.000}{10.000} + (0,2*1,6+1)*\frac{1}{2}*10.000 = \underset{20.280}{22.780}$$

Ergebnis:

Das vorläufige Optimum ist somit auch das endgültige Optimum.

Wäre $\bar{r}_3^{neu} = 11.000$ $\left(\text{statt } \bar{r}_3^{alt} = 10.000\right)$, so entstünden folgende Kosten in Höhe von 20.673,64 für die Rabattklassenuntergrenze 11.000 und somit höhere Kosten als für die Grenze 5.000 (mit 20.510), d. h. das endgültige Optimum läge bei 5.000.

2.2.2.3 + 2.2.3 (S. 106 – 113) entfallen

3. Operative Produktionslogistik

3.1. Formulierung des klassischen Transportproblems

Gegeben sind:

- R Versandorte mit Vorratsmengen im Umfang von jeweils A_r, mit $r = 1(1)R$, in [ME]/[PZE]
- S Empfangsorte mit Bedarfsmengen im Umfang B_s, mit $s = 1(1)S$
- R*S Transportkostensätze $k_{r,s}$ für den Transport zwischen r und s, in [GE]/[ME] ([GE]/([ME][EE]) * [EE])

Gesucht sind:

- R*S transportkostenminimale Mengen $x^*_{r,s}$ in [ME]/[PZE]

Formulierung eines linearen Programms

Zielfunktion:

Min $Min\ z = K_T = \sum_{r=1}^{R}\sum_{s=1}^{S} k_{r,s} x_{r,s}$

unter den Nebenbedingungen:

a) Vorratsrestriktionen

$$\sum_{s=1}^{S} x_{r,s} \overset{(\le)}{=} \underbrace{A_r}_{\substack{\text{Vorrat} \\ \text{in Ort r}}} \quad \forall r = 1(1)R$$

b) $$\sum_{r=1}^{R} x_{r,s} = \underbrace{B_s}_{\substack{\text{Bedarf} \\ \text{in Ort s}}} \quad \forall s = 1(1)S$$

c) Nichtnegativitätsbedingungen

$x_{r,s} \ge 0 \ \ \forall r = 1(1)R,\ \forall s = 1(1)S$

Beispiel:

Von R = 3 Versandorten mit A_1, A_2 und A_3 als Vorratsmengen werden S = 4 Empfangsorte mit B_1, B_2, B_3 und B_4 als Bedarfsmengen beliefert.

$k_{r,s}$

von\nach	s=1	s=2	s=3	s=4	A_r
r=1	3	6	5	7	18
r=2	2	7	9	4	22
r=3	1	3	4	2	10
B_s	10	13	14	13	**50**

Formulierung des klass. Transportproblems:

Min $K_T = 3x_{1,1} + 6x_{1,2} + 5x_{1,3} + 7x_{1,4} + 2x_{2,1} + \ldots + 2x_{3,4}$

unter den Nebenbedingungen:

a) Vorratsrestriktionen

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 18 \qquad (r = 1)$$

$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} = 22 \qquad (r = 2)$$

$$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} = 10 \qquad (r = 3)$$

b) Bedarfsrestriktionen

$x_{1,1}+x_{2,1}+x_{3,1}=10 \quad (s=1)$

$x_{1,2}+x_{2,2}+x_{3,2}=13 \quad (s=2)$

$x_{1,3}+x_{2,3}+x_{3,3}=14 \quad (s=3)$

$x_{1,4}+x_{2,4}+x_{3,4}=13 \quad (s=4)$

c) Nicht-Negativitäts-Bedingung

$x_{r,s} \geq 0 \quad \forall r=1(1)3, \forall s=1(1)4$

3.2 Bestimmung einer Näherungslösung

Ausgangspunkt einer jeden Näherungslösung ist die sog. Transportmengenmatrix

von r \ nach s	s=1		s=2		...	s=S	A_r
r=1	$k_{1,1}$	$x_{1,1}$	$k_{1,2}$	$x_{1,2}$			A_1
r=2	$k_{2,1}$	$x_{2,1}$	$k_{2,2}$	$x_{2,2}$			A_2
...							...
r=R							A_R
B_s	B_1		B_2		...	B_S	Σ

Grundidee:

Jede Transportmenge $x_{r,s}$ ist durch die Vorratsmenge A_r und/oder die Bedarfsmenge B_s nach oben begrenzt.

$x_{r,s}=\min\{A_r, B_s\}$

Die verschiedenen Näherungsverfahren gehen nun die Felder der obigen Matrix in ihrer jeweils eigenen Reihenfolge durch und befüllen die Felder.

3.2.1 Nordwest-Eckenregel

(d. h. man befüllt die Felder der Transportmengenmatrix von links oben nach rechts unten)

	s=1		s=2		s=3		s=4		A_r
r=1	**3**	10	**6**	8	**5**	0	**7**	0	~~18~~ ~~8~~ 0
r=2	**2**	0	**7**	5	**9**	14	**4**	3	~~22~~ ~~17~~ ~~3~~ 0
r=3	**1**	0	**3**	0	**4**	0	**2**	10	~~10~~ 0
B_s	~~10~~ 0		~~13~~ ~~5~~ 0		~~14~~ 0		~~13~~ ~~10~~ 0		50

$K_T = 3*10+6*8+7*5$
$+9*14+4*3+2*10=271$

Beurteilung:

- sehr einfach
- willkürliches Vorgehen
- keine Berücksichtigung von Kosten

3.2.2 Minimale-Kosten-Regel

	s=1		s=2		s=3		s=4		A_r
r=1	**3**	0	**6**	4	**5**	14	**7**	0	~~18~~ 4 0
r=2	**2**	0	**7**	9	**9**	0	**4**	13	~~22~~ 9 0
r=3	**1**	10	**3**	0	**4**	0	**2**	0	~~10~~ 0
B_s	~~10~~ 0		~~13~~ 9 0		~~14~~ 0		~~13~~ 0		50

$K_T = 6*4+5*14+7*9$
$+4*13+1*10=219$

Beurteilung:

- sehr einfach
- Berücksichtigung von Kosten
- hohes Risiko, günstige Alternativen ausschließen

Mini-Beispiel:

	s=1		s=2		A_r
r=1	**1**	50	**3**	10	~~60~~ 10
r=2	**2**	0	**7**	40	~~40~~ 0
B_s	~~50~~ 0		~~50~~ ~~40~~ 0		100

3.2.3 Vogelsche Approximation

(d. h. belege zuerst dasjenige Feld, bei dem der Schaden im Falle einer Nicht-Belegung am größten ist.)

	s=1		s=2		A_r
r=1	**1**	10	**3**	50	~~60~~ ~~50~~ 0
r=2	**2**	40	**7**	0	~~40~~ 0
B_s	~~50~~ ~~10~~ 0		~~50~~ 0		100

größter Schaden: 5

$K_T = 240$

	s=1		s=2		s=3		s=4		A_r	Δ_i		
r=1	**3**	4	**6**	0	**5**	14	**7**	0	~~18~~ 4 0	2	2	3
r=2	**2**	6	**7**	3	**9**	0	**4**	13	~~22~~ ~~13~~ ~~3~~ 0	2	2	2
r=3	**1**	0	**3**	10	**4**	0	**2**	0	~~10~~ 0	1		
B_s	~~10~~ ~~6~~ 0		~~13~~ ~~3~~ 0		~~14~~ 0		~~13~~ 0		50			
Δ_j	1		3		1		2					
	1		1		4		3					
	1		1				3					

$$K_T = 3*4+5*14+2*6+7*3+4*13+3*10 = 197$$

Beurteilung:

- relativ aufwendig
- Berücksichtigung von Kosten
- Geringeres Risiko, günstige Alternativen auszuschließen

3.3 Bestimmung der optimalen Lösung

Es gibt unterschiedliche Verfahren, von denen die Stepping-Stone-Methode am einfachsten ist.

Grundidee:

Für alle Felder mit Inhalt 0 wird überprüft, ob eine Erhöhung von 0 auf 1 die Transportkosten insgesamt senkt. Dabei soll die isolierte Wirkung einer Erhöhung von 0 auf 1 für genau ein Feld überprüft werden, so dass diese Erhöhung nur bei denjenigen Feldern eine Änderung auslösen darf, die vorher nicht 0 beinhalteten.

Beispiel:
Ausgangstableau von der Vogel'schen Approximationsmethode, weil K_T hier am geringsten ist.

	s=1		s=2		s=3		s=4		A_r
r=1	**3**	4 ↓ 1	$\boxed{\mathbf{6}}$	↑ 3	**5**	14	**7**	0	18
r=2	**2**	6 ↑ 9	$\boxed{\mathbf{7}}$	3 ↓ 0	**9**	0	**4**	13	22
r=3	**1**	0	**3**	10	**4**	0	**2**	0	10
B_s	10		13		14		13		50

Zu dem eingezeichneten Zyklus gehört folgende Transportkostenänderung
$\Delta k_{1,2} = 6 - 3 + 2 - 7 = -2$

$\Delta k_{1,4} = 7 - 3 + 2 - 4 = 2,\ \ \Delta k_{2,3} = 5,\ \ \Delta k_{3,1} = 3,\ \ \Delta k_{3,3} = 4,\ \ \Delta k_{3,4} = 2$

Ergebnis:
Nur im Fall (r=1 / s=2) ist es sinnvoll, vom Feldinhalt 0 auf mindestens 1 überzugehen, weil hierdurch Kosten von 2[GE]/[ME] eingespart werden.

$K_T = 3*1 + 6*3 + 5*14 + 2*9 + 4*13 + 3*10 = 191$

Nun müsste für dieses Tableau die Stepping-Stone-Methode erneut angewendet werden.
$\Delta k_{1,4} = 2,\ \Delta k_{2,2} = 2,\ \ \Delta k_{2,3} = 5,\ \ \Delta k_{3,1} = 1,\ \ \Delta k_{3,3} = 2,\ \ \Delta k_{3,4} = 0$

d. h. es gibt einen weiteren Transportplan, der ebenfalls zu $K_T = 191$ führt.

~> Das Optimum ist gefunden: $K_T^* = 191$

Ehemalige Klausuraufgabe
a) Näherungslösung nach Nordwest und Vogel.
b) Stepping-Stone-Methode auf Vogel aufsetzen.

	s=1		s=2		s=3		s=4		s=5		A_r
r=1	**11**	400	**7**	150	**16**	70	**14**	0	**10**	0	~~620~~ ~~220~~ ~~70~~ 0
r=2	**15**	0	**9**	0	**15**	230	**12**	150	**21**	0	~~380~~ ~~150~~ 0
r=3	**8**	0	**19**	0	**17**		**6**	350	**15**	250	~~600~~ ~~250~~ 0
B_s	~~400~~ 0		~~150~~ 0		~~300~~ ~~230~~ 0		~~500~~ ~~350~~ 0		~~250~~ 0		1600

$K_T^{NWE} = 17.670$

	s=1		s=2		s=3		s=4		s=5		A_r	Δi				
r=1	**11**	300	**7**	0	**16**	70	**14**	0	**10**	250	~~620~~ ~~370~~ ~~70~~ 0	3	3	3	3	**5**
r=2	**15**	0	**9**	150	**15**	230	**12**	0	**21**	0	~~380~~ ~~230~~ 0	3	6	6	**6**	0
r=3	**8**	100	**19**	0	**17**	0	**6**	500	**15**	0	~~600~~ ~~100~~ 0	2	**7**			
B_s	~~400~~ ~~300~~ 0		~~150~~ 0		~~300~~ ~~70~~ 0		~~500~~ 0		~~250~~ 0		1600					
Δj	3		2		1		**6**		5							
	3		2		1				5							
	4		2		1				**11**							
	4		2		1											
	4				1											

$\Delta_{s=4} = 6,\ \Delta_{r=3} = 7,\ \Delta_{s=5} = 11,\ \Delta_{r=2} = 6,\ \Delta_{r=1} = 5$

$K_T^{VAM} = 15.520$

zu b)

	s=1		s=2		s=3		s=4		s=5		A_r
r=1	**11**	300	**7**	0 (+1)	**16**	70 (-1)	**14**	0	**10**	250	620
r=2	**15**	0	**9**	150 (-1)	**15**	230 (+1)	**12**	0	**21**	0	380
r=3	**8**	100	**19**	0	**17**	0	**6**	500	**15**	0	600
B_s	400		150		300		500		250		1600

$\Delta k_{1,2} = 7 - 16 + 15 - 9 = -3$

$\Delta k_{1,4} = 5,\ \Delta k_{2,1} = 5,\ \Delta k_{2,4} = 4,\ \Delta k_{2,5} = 12,\ \Delta k_{3,2} = 12,\ \Delta k_{3,3} = 4,\ \Delta k_{3,5} = 8$

c) LKW-Fahrer Pfiffig hat für die Strecke von r = 2 nach s = 2 eine Abkürzung, wodurch $k_{2,2}$ sinkt. Um wie viele [GE] muss $k_{2,2}$ mindestens sinken, damit Vogel zum Optimum führt.

$k_{2,2}^{alt} = 9$

Mit diesem Wert führte Vogel nicht zum Optimum, weil galt:

$\Delta k_{1,2} = 7 - 16 + 15 \underbrace{-9}_{-k_{2,2}} = -3 < 0$

Wenn also $k_{2,2}$ sinkt und zwar mindestens auf 6, dann führt Vogel zum Optimum, wenn $k_{2,2}^{neu} \le 6$ nicht dazu führt, dass ein anderer $\Delta k -$Wert negativ wird.

[Hier: durch den Wechsel von $k_{2,2}^{alt} = 9$ auf $k_{2,2}^{neu} \le 6$ ist nur betroffen:

$\Delta k_{3,2}^{alt} = 12$ und $\Delta k_{3,2}^{neu} \ge 15$]

4. Operative Absatzlogistik

4.1 Traveling-Salesmen-Problem (= Rundreiseproblem)

4.1.1. Problemformulierung

Problemstellung:

Von einem Produktionsstandort aus sind R Kunden in einer Rundreise so zu beliefern, dass jeder Kunde genau einmal bedient wird und am Ende der Produktionsstandort wieder angefahren wird.

Ziel

Minimierung der zurückzulegenden Gesamtstrecke ($\triangleq$ Minimierung der gesamten Transportkosten)

Beispiel

Gegeben sind die Entfernungen zwischen einem Ausgangsort r = 0 und R = 4 Zielorten:

von \ nach	0	1	2	3	4
0	0	5	8	12	13
1	5	0	90	7	15
2	6	75	0	6	31
3	12	7	6	0	28
4	13	13	31	29	0

Gesucht wird die kürzeste Rundreise!

Dabei gibt es bei R Zielorten genau R! Möglichkeiten. Hier 4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24 alternative Rundreisen!

Enumeratives Vorgehen:

(1) Rundreise: 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 0
Strecke: 5 + 90 + 6 + 28 + 13 = 142

(2) Rundreise: 0 – 4 – 3 – 2 – 1 – 0
Strecke: 13 + 29 + 6 + 75 + 5 = 128

Als kürzeste Rundreise erweist sich:
opt. Rundreise: 0 – 4 – 1 – 3 – 2 – 0
kürzeste Strecke: 13 + 13 + 7 + 6 + 6 = 45

Ab $R \geq 5$ empfiehlt sich das enumerative Vorgehen nicht mehr.
Hier wird dann ein Algorithmus eingesetzt, der das folgende lineare Programm löst:

$$Min\ GS = \sum_{r=1}^{R} \sum_{s=1}^{S} y_{r,s} * w_{r,s}$$

mit $y_{r,s}$: (Parameter) Entfernung von Ort r nach Ort s, in [EE]

und $w_{r,s}$: (Variable) Binärvariable, in [–] mit $w_{r,s} = \begin{cases} 1, & \text{wenn die Rundreise direkt von r nach s führt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

unter den Nebenbedingungen

(1) Jeder Ort ist genau einmal Zielort:

$$\sum_{r=1}^{R} w_{r,s} = 1 \quad \forall s = 1(1)S \ \ (= R)$$

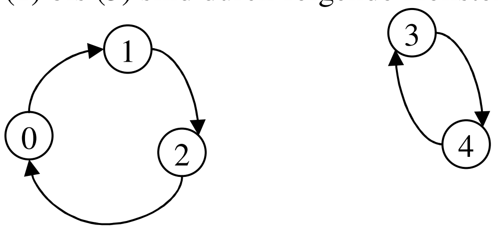
(2) Jeder Ort ist genau einmal Startort:

$$\sum_{s=1}^{S} w_{r,s} = 1 \quad \forall r = 1(1)R$$

(3) Für die Variable $w_{r,s}$ gilt:

$$w_{r,s} \in \{0;1\}, \quad r = 1(1)R, \quad s = 1(1)S$$

Problem:
(1) bis (3) sind durch folgende Konstellation erfüllt:



Um derartige Konstellationen zu verhindern, benötigt man (4):

(4) Nebenbedingungen zur Vermeidung von Kurzzyklen
Für Probleme mit vier Zielorten sind Rundreisen zwischen zwei Orten auszuschließen, da dann auch keine Rundreisen (Kurzzyklen) mit drei Orten auftreten können.

$w_{1,0} + w_{0,1} \leq 1$ $\quad w_{2,1} + w_{1,2} \leq 1$ $\quad w_{3,2} + w_{2,3} \leq 1$ $\quad w_{4,3} + w_{3,4} \leq 1$

$w_{2,0} + w_{0,2} \leq 1$ $\quad w_{3,1} + w_{1,3} \leq 1$ $\quad w_{4,2} + w_{2,4} \leq 1$

$w_{3,0} + w_{0,3} \leq 1$ $\quad w_{4,1} + w_{1,4} \leq 1$

$w_{4,0} + w_{0,4} \leq 1$

Bei sechs Zielorten benötigt man 91, bei vierzehn mehr als 500.000 solcher Nebenbedingungen.

4.1.2 Problemlösung

Für die Entfernungsmatrix (s. o.) wird in der letzten Zeile bzw. letzten Spalte das jeweilige Spaltenminimum (bzw. Zeilenminimum) ermittelt. Hierdurch wird der jeweils am schnellsten (i. S. v. kürzesten) zu erreichende Partner für den Ort r bzw. s ermittelt.

nach / von	0	1	2	3	4	Min
0	X	5	8	12	13	5
1	5	X	90	7	15	5
2	6	75	X	6	31	6
3	12	7	6	X	28	6
4	13	13	31	29	X	13
Min	5	5	6	6	13	

Von allen Zeilen wird das jeweilige Zeilenminimum subtrahiert, so dass jede Zeile als Minimum eine 0 enthält.
Dann werden die jeweiligen Spaltenminima neu berechnet. Wenn eine / mehrere Spalte(n) als Minimum nicht 0 haben, dann wird das ermittelte Minimum von allen Elementen derselben Spalte abgezogen.

nach / von	0	1	2	3	4	Min
0	X	0 (0+0)	3	7	~~8~~ 0 (0+2)	0
1	0 (2+0)	X	85	2	~~10~~ 2	0
2	0 (0+0)	69	X	0 (0+2)	~~25~~ 17	0
3	6	1	0 (1+3)	X	~~22~~ 14	0
4	0 (0+0)	0 (0+0)	18	16	X	0
Min	0	0	0	0	~~8~~ 0	

Für jede 0 wird nun der Schaden ermittelt, der in Kauf zu nehmen ist, wenn die direkte Verbindung von r nach s nicht realisiert wird.

Die Direktverbindung von r = 3 nach s = 2 ist diejenige mit dem größten Schaden (Opportunitätskosten); sie wird auf jeden Fall realisiert. Da Kurzzyklen verboten sind, kann die gesuchte Rundreise die Direktverbindung von r = 2 nach s = 3 nicht enthalten.

Es bleibt als Restmatrix übrig:

nach / von	0	1	3	4	Min
0	X	0 (0+0)	~~7~~ 5	0 (0+2)	0
1	0 (0+0)	X	~~2~~ 0 (0+5)	2	0
2	0 (0+17)	69	X	17	0
4	0 (0+0)	0 (0+0)	~~16~~ 14	X	0
Min	0	0	~~2~~ 0	0	

In der gesuchten Rundreise ist die Direktverbindung „von 2 nach 0“ enthalten:
Da schon „von 3 nach 2“ eingeplant ist, darf die Direktverbindung „von 0 nach 3“ nicht gewählt werden (verbotener Kurzzyklus!)

Es bleibt als Restmatrix

nach / von	1	3	4	Min
0	0 (0+0)	X	0 (0+2)	0
1	X	0 (2+14)	2	0
4	0 (0+14)	14	X	0
Min	0	0	0	

Die gesuchte Rundreise enthält die Direktverbindung „von 1 nach 3“ und lautet nun: „1 – 3 – 2 – 0“, so dass die Direktverbindung „von 0 nach 1“ verboten ist.

Als Restmatrix ergibt sich, dass die beiden Direktverbindungen „von 0 nach 4“ und „von 4 nach 1“ keine Alternative haben, d. h. die entsprechende 0 nach als Opportunitätskosten zu tragen: $+\infty$ und ist daher in die gesuchte Rundreise aufzunehmen:

Ergebnis:

0 – 4 – 1 – 3 – 2 – 0

Beachte:
Ergeben sich in einem Schritt zwei oder mehr Nullen mit identischen Opportunitätskosten, so müssen alle weiteren Schritte für diese zwei oder mehr Direktverbindungen getrennt überprüft werden.

4.2. Tourenplanungsproblem

4.2.1 Formulierung des Problems

Von einem Produktionsstandort aus sind R Kunden in einer oder in mehreren Rundreisen (= Touren) so zu beliefern, dass jeder Kunde genau einmal bedient wird und am Anfang sowie am Ende jeder Tour der Produktionsstandort steht.

Ziel:

Minimierung der zurückzulegenden Gesamtstrecke ($\triangleq$ Min. der gesamten Transportkosten)

Gegeben sind:

- Ein Depot D, z. B. der Produktionsstandort
- R Absatzorte
- symmetrische Entfernungsmatrix
- R Bedarfe X_r
- R*S Kostensätze $k_{r,s}$
- beschränkte Kapazität A für den LKW
- zeitliche Obergrenze T für die Dauer einer Tour

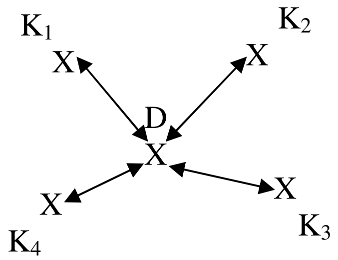
Gesucht sind:

- die zieloptimalen Touren

Vgl. Formulierung des LPs ~> Skript Seite 118

4.2.2 Lösung des Problems

Ausgangspunkt ist die sog. Pendellösung, bei der für R Kunden R Touren gewählt werden:

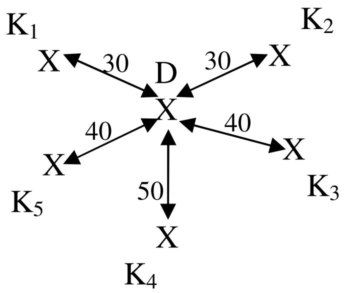


Hieran anknüpfend wird überlegt, ob es zu einer Kostenersparnis („Saving“) führt, wenn man zwei Kunden auf einer Tour gemeinsam bedient:

$$\Delta k_{1,2} = \underbrace{k_{D,1} + k_{D,2}}_{\text{Ersparnisse}} - \underbrace{k_{1,2}}_{\text{Mehrkosten}}$$

Diese Ersparnis $\Delta k_{r,s}$ wird für alle Paare (r/s) ermittelt und in der Reihenfolge fallender Ersparnisse wird überprüft, ob die Zusammenlegung zweier Kunden auf einer Tour (beachte: A und T) umsetzbar ist.

Beispiel:



k = 10 [GE]/[km]
K = 3800 (Pendellösung)

Gegeben ist eine symmetrische Entfernungsmatrix

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
K_1	0	50	68	65	30
K_2		0	40	79	65
K_3			0	70	76
K_4				0	40
K_5					0

Gegeben sind die Bedarfe der R Kunden

K_r	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
X_r	30	20	10	30	40

Max. Kapazität des LKW: A = 70 / Max. Zeit (Restzeit): 120Minuten / Geschwindigkeit: 80[km]/[h]

Savings-Verfahren

$\Delta k_{1,2} = k_{D,1} + k_{D,2} - k_{1,2} = (10*30)+(10*30)-(10*50) = 10*(30+30-50) = 100$

$\Delta k_{1,3} = 20$ $\Delta k_{2,3} = 300$ $\Delta k_{3,4} = 200$

$\Delta k_{1,4} = 150$ $\Delta k_{2,4} = 10$ $\Delta k_{3,5} = 40$

$\Delta k_{1,5} = 400$ $\Delta k_{2,5} = 50$ $\Delta k_{4,5} = 500$

In der Reihenfolge fallender Savings

$\Delta k_{4,5} - \Delta k_{1,5} - \Delta k_{2,3} - \Delta k_{3,4} - \Delta k_{1,4} - \Delta k_{1,2} - \Delta k_{2,5} - \Delta k_{3,5} - \Delta k_{1,3} - \Delta k_{2,4}$

Wird überprüft, ob A und T eingehalten werden.

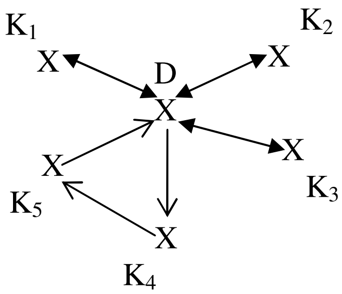
1. Tour:

$D - K_4 - K_5 - D$

a) Ist die Kapazitätsrestriktion erfüllt?
$X_4 + X_5 = 30 + 40 = 70 \le A$ ☑

b) Ist die Zeitrestriktion erfüllt?
$\frac{\overline{DK_4} + \overline{K_4K_5} + \overline{K_5D}}{80km/h} \le T(=2)? \Leftrightarrow \frac{(50+40+40)km}{80km/h} = 1{,}625h \le 2$ ☑

~> Vorläufige Lösung



$$K = \underbrace{3.800}_{K^{alt}} - \underbrace{500}_{\text{Saving}} = \underbrace{3.300}_{K^{neu}}$$

2. Tour

$D - K_4 - K_5 - K_1 - D$

a) Ist die Kapazitätsrestriktion erfüllt?

$$X_1 + X_4 + X_5 \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} A \quad \Leftrightarrow \quad 30 + 30 + 40 > 70 \ \boxtimes$$

~> Vorläufige Lösung bleibt bestehen!

3. Tour

$D - K_2 - K_3 - D$

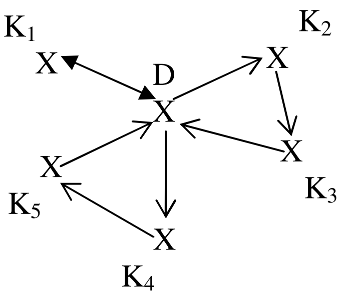
a) Ist die Kapazitätsrestriktion erfüllt?

$$X_2 + X_3 \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} A \quad \Leftrightarrow \quad 20 + 10 < 70 \ \boxed{\checkmark}$$

b) Ist die Zeitrestriktion erfüllt?

$$\frac{\overline{DK_2} + \overline{K_2K_3} + \overline{K_3D}}{80km/h} \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} 2h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(30+40+40)\,km}{80km/h} = 1{,}375h < 2h \ \boxed{\checkmark}$$

Neue vorläufige Lösung



$$\Delta k_{2,3} = 300$$

$$K^{alt} = 3.300 - \underbrace{300}_{\text{Saving}} = 3.000 = K^{neu}$$

4. Tour

$D - K_2 - K_3 - K_4 - K_5 - D$

a) Ist die Kapazitätsrestriktion erfüllt?

$$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 100 > 70 = A \ \boxtimes$$

5. Tour

$D - K_1 - K_4 - K_5 - D$

a) Ist die Kapazitätsrestriktion erfüllt?

$$X_1 + X_4 + X_5 = 100 > 70 = A \ \boxtimes$$

6. Tour

$D - K_1 - K_2 - K_3 - D$

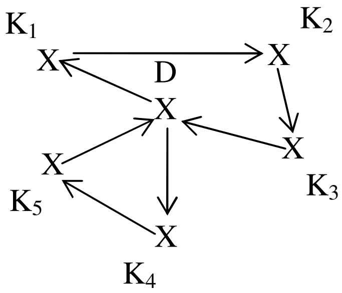
a) Ist die Kapazitätsrestriktion erfüllt?

$$X_1 + X_2 + X_3 = 60 < 70 \ \boxed{\checkmark}$$

b) Ist die Zeitrestriktion erfüllt?

$$\frac{\overline{DK_1}+\overline{K_1K_2}+\overline{K_2K_3}+\overline{K_3D}}{80km/h}=\frac{(30+50+40+40)\,km}{80km/h}=2h\leq T \;\boxtimes$$

~> Lösung:



$$\Delta k_{1,2}=100$$

$$K^{alt}=3.000-\underbrace{100}_{\text{Saving}}=2.900=K^{neu}$$

Das Savings-Verfahren liefert nur eine Näherungslösung, da es eine Heuristik ist.
Nun könnte man für die gefundenen Touren jeweils das Rundreiseproblem aufsetzen und zieloptimal lösen.